

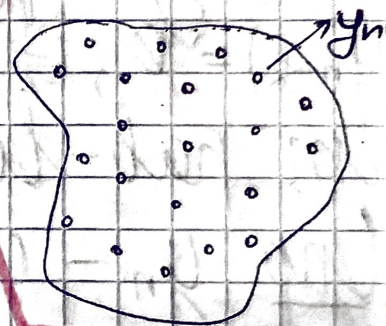
Лит-ра:

11/02

- 1) Андреев — "ЧМ"
- 2) Самарский, Тупин — "ЧМ" (1989 и позже)
- 3) Самарский, Николаев — "Мет. реш-й сетог. ур-ний"
- 4) Тохванов, Мелтков — "ЧМ"

$u'' - qu = f - \Phi u$, $u(x) = \text{непр.}$, но мы $\neq u(x)$, $x \in \Omega_n$ (точеч. обл-ть)

$x \in \Omega$ (непр. обл-ть)



Глава 1. Разностные ур-ния

§ 1. Сеточные ф-ции

Опр 1 ф-ция $u^{(n)} \in U_n$ есть ф-ция целочисленного аргумента. Будем наз-ть ее сеточной ф-цией.

Введем оп-р $\nabla u_n = u_n - u_{n-1}$

$$\nabla^3 u_n - 3\nabla u_n + 2u_n = f \quad (\text{аналог } u''' - 3u' + 2u = f)$$

$$\begin{aligned} \nabla^3 u_n &= \nabla^2 (u_n - u_{n-1}) = \nabla (u_n - u_{n-1} - (u_{n-1} - u_{n-2})) \\ &= \nabla (u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}) = u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-1} + \\ &+ 2u_{n-2} - u_{n-3} = u_n - 3u_{n-1} + 3u_{n-2} - u_{n-3} \quad // \text{подставим в лев.} \end{aligned}$$

$$y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3} - 3(y_n - y_{n-1}) + 2y_n = f,$$

$$3y_{n-2} - y_{n-3} = f \quad u''' - 3u' + 2u = f$$

⇒ Непохоти! ⇒ **FAIL!**

Опр $\square$ дана ф-ция $\Phi(n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k})$, где y_n — сеточ. ф-ция. Тогда ур-ние $\Phi(n, y_n, \dots, y_{n-k}) = 0$ назовем сеточ. ур-нием k -го поряд-ка

Опр y_n — реш-е сеточ. ур-ния $\Phi(n, y_n, \dots, y_{n-k}) = 0$, if при подстановке оно обращает рав-во в тожд-во.

Опр y_n — общее реш-е разност. ур-ния, if в нем содержатся все реш-а данного ур-ния.

If мы нашли сет. ф-цию, удовл-ую ур-нию $\Phi = 0$ в $(k-1)$ последовательной т., то y_n — частное реш-е.

Опр $\square$ ф-ция $\Phi(n, y_n, \dots, y_{n-k})$ линейна по перемен-ым $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$, т.е. им. вид: $\Phi = \sum_{j=0}^k \alpha_j(n) y_{n-j}$, при этом $\alpha_0(n), \alpha_k(n) \neq 0$. Тогда ур-ние $\sum_{j=0}^k \alpha_j(n) y_{n-j} = 0$ наз-

сея линейным (разност.) ур-нием k -го
пор-ка

$\exists \dot{y}_n$ - общ. реш. однород. ур-ния. $\exists$
 $\bar{y}_n$ - частн. реш-е неоднород. ур-ния. Тогда
 $y_n = \dot{y}_n + \bar{y}_n$ - общ. реш. неоднород. ур-ния
 $\Phi = f_n$

Л.2. Линейные сеточ. ур-ния 1-го
пор-ка

$$\alpha_0(n) y_n + \alpha_1(n) y_{n-1} = f_n; \alpha_0, \alpha_1 \neq 0$$

$\downarrow \downarrow$ (новый вид)

$$y_n = q_n y_{n-1} + f_n, \text{ где } q_n = -\frac{\alpha_1(n)}{\alpha_0(n)}, f_n = \frac{f_n}{\alpha_0(n)},$$

$$y_0 = a$$

1) Однород. ур-ние $y_n = q_n y_{n-1} = q_n q_{n-1} \dots$
 $y_{n-2} = \dots = \left(\prod_{j=1}^n q_j \right) y_0$

$$\dot{y}_n = \prod_{j=1}^n q_j \text{ — реш-е однород. ур-я}$$

2) $y_n = C(n) \prod_{j=1}^n q_j$ — общее реш-е однород. ур-я
подставим в $y_n = q_n y_{n-1} + f_n$

$$C_n \dot{y}_n = q_n C_{n-1} \dot{y}_{n-1} + f_n$$

$\dot{y}_n = q_n \dot{y}_{n-1}$

~~$$C_n \dot{y}_n = C_{n-1} \dot{y}_n + f_n$$~~

$$C_n = C_{n-1} + \frac{f_n}{\dot{y}_n} = C_{n-2} + \frac{f_{n-1}}{\dot{y}_{n-1}} + \frac{f_n}{\dot{y}_n} = \dots = C_0 +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{f_j}{\dot{y}_j}$$

$$y_n = (C_0 + \sum_{j=1}^n \frac{f_j}{\dot{y}_j}) \prod_{j=1}^n q_j = (C_0 + \sum_{j=1}^n (f_j \prod_{i=1}^{j-1} q_i^{-1})) \prod_{j=1}^n q_j$$

— решение неоднород. ур-ния

1) $q_j = q^j$, $j = 1, 2, \dots$

$$y_n = [C_0 + \sum_{j=1}^n f_j q^{-j}] q^n$$

2) $q_j = q$, $f_j = f = \text{const}$

$$y_n = [C_0 + f \sum_{j=1}^n q^{-j}] q^n, \text{ где } q^n \sum_{j=1}^n q^{-j} = q^n \left(\frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{q^{n+1}}}{1 - \frac{1}{q}} \right)$$

$$= \frac{q^n q (q^{n+1} - q)}{q^{n+1} q (q - 1)} = \frac{q (q^n - 1)}{q (q - 1)} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

П.3 Лин. разност. (сеточ.) ур-ние k-го пор-ка

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j(n) y_{n-j} = f_n$$

α_j , не зависящ. от n; ур-ние k-го пор-ка с пост. коэфф.

1) $\neq$ однород. ур-ние: $\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \dots + \alpha_k y_{n-k} = 0$

Будем искать реш-е в виде $y_n = q^n$:

$$\alpha_0 q^n + \alpha_1 q^{n-1} + \dots + \alpha_k q^{n-k} = 0 \quad | : q^{n-k}, q \neq 0,$$

$$\alpha_0 q^k + \alpha_1 q^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} q + \alpha_k = 0 - \text{хар.}$$

ур-ние q / с точ. для ур-ния k -го порядка с пост. коэфф.

Это ур-ние имеет k корней: вещ., комп., кратные, ...

Эти корни $q_1, \dots, q_k \Rightarrow$ тогда $y_n = q_j^n, j=1, 2, \dots, k$ — реш-я сст. ур-ний

1) Эти корни $q_1, \dots, q_k$ имеют крат-ть 1. Тогда их лн / корб. также будет реш-е.

$$y_n = \sum_{j=1}^k C_j q_j^n - \text{реш-е.}$$

Покажем, что q_j^n — лн / независ., $k=2$, $q_1 \neq q_2$

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} = 0$$

$$C_1 q_1^n + C_2 q_2^n = 0, \quad C_1, C_2 \neq 0$$

$$C_1 q_1^{n-1} + C_2 q_2^{n-1} = 0$$

относит. C_1, C_2 :

$$\begin{vmatrix} q_1^n & q_2^n \\ q_1^{n-1} & q_2^{n-1} \end{vmatrix} = (q_1 - q_2)^{n-1}$$

$$(q_1 - q_2) \neq 0$$

противоречие

$$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$\Downarrow \square$ $q_1, \dots, q_k$ — простые корни хар. ур-ния,
 тогда ф-ции $q_1^n, \dots, q_k^n$ — лн/нелнзавис и
 обш. реш-е однород. ур-ния имеет вид
 $y_n = \sum_{j=1}^k C_j q_j^n$ // $\blacktriangle \blacksquare$ выше //

2) $\Downarrow \square$ корень q имеет крат-ть s . Тогда ф-ция
 $y_n = P_{s-1}(n) q^n$, где $P_{s-1}(n)$ — ст. полином
 степени $(s-1)$, будет обш-м реш-м од-
 нород. ур-ния, а ф-ции вида $n^l q^n$, $l=0, 1, \dots,$
 $s-1$, будут лн/нелнзавис.

$\blacktriangle$ $k=2, s=2$: $\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} = 0$
 $\alpha_0 q^2 + \alpha_1 q + \alpha_2 = 0$

q^n — реш-е (показывали раньше), покажем, что
 nq^n — тоже реш-е

$$\alpha_0 nq^n + \alpha_1 (n-1)q^{n-1} + \alpha_2 (n-2)q^{n-2} = q^{n-2} (\alpha_0 nq^2 + \alpha_1 (n-1)q + \alpha_2 (n-2)) = 0?$$

$$\alpha_0 nq^2 + \alpha_1 (n-1)q + \alpha_2 (n-2) = \alpha_0 q^2 (n-2) + 2\alpha_0 q^2 + \alpha_1 q(n-2) + \alpha_1 q + \alpha_2 (n-2) = (n-2) [\alpha_0 q^2 + \alpha_1 q + \alpha_2] + q [2\alpha_0 q + \alpha_1] = 0$$

$\square$ т.к. q — корень кр-ти 2, то: $(\alpha_0 q^2 + \alpha_1 q + \alpha_2)' = 0$
 лн/нелнзав-ть q^n и nq^n док-ся по пред. $\Downarrow$ $2\alpha_0 q + \alpha_1 = 0$

! Зам 1) $\square$ q - компл. корень хар. ур-ния

$$q = |q| e^{i\varphi}, \varphi \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Тогда $q^* = |q| e^{-i\varphi}$ - сопр. тоже корень

2) $\operatorname{Re} q$ - корень ур-ния $\Rightarrow \operatorname{Re} q = |q| \cos \varphi$

$\operatorname{Im} q$ - корень ур-ния $\Rightarrow \operatorname{Im} q = |q| \sin \varphi$

Тогда $y_n = q^n$ - реш.

$y_n = (q^*)^n$ - реш.

$y_n = |q|^n \cos(n\varphi)$ - тоже реш.

$y_n = |q|^n \sin(n\varphi)$ - тоже реш.

Все
они
линейно
незав.